Διαφορικές Εξισώσεις 1

Τρίτη 27/3/2018

Θεώρημα (Ύπαρξη τοπικής λύσης)

Έστω $F : I \times U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, I ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Έστω $(t_0, x_0) \in I \times U$ και αφού $I \times U$: ανοιχτό του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ θα $\exists\, a, b > 0$:
$K_{a,b}(t_0, x_0) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \le b\} \subseteq I \times U$.

Θεώρημα (Picard)

Έστω $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ συνεχής και πληροί την συνθήκη Lipschitz ως προς x στο $K_{a,b}(t_0, x_0)$ με σταθερά Lipschitz $L > 0$. Έστω $M := \sup_{t \in [t_0 - a, t_0 + a]} |F(t, x_0)|$

και τ : $0 < \tau < \min\{a, \frac{b}{Lb + M}\}$,

Τότε υπάρχει μοναδική $u : [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \to \mathbb{R}^n$
τ.ω. $Tu = u$ όπου
$$(Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))\, ds.$$

Αποδ.

1ο βήμα: Έστω F : Lipschitz στο $K_{a,b}(t_0, x_0)$

$$\Rightarrow \exists L>0 : |F(t,x)-F(t,y)| \le L \cdot |x-y| \quad \forall (t,x),(t,y) \in K_{a,b}.$$

Έστω τυχαίο $(t,x) \in K_{a,b}(t_0,x_0)$ ~~έχω~~ τότε:

$$|F(t,x)| = |F(t,x)-F(t,x_0)+F(t,x_0)|$$
$$\le |F(t,x)-F(t,x_0)| + |F(t,x_0)|$$
$$\le L \cdot |x-x_0| + M \le L\cdot b + M.$$

ορίζω $X := \{ u \in C([t_0-\tau, t_0+\tau], \mathbb{R}^n) : |u - x_0| \le b \}$

εφοδιάζω το σύνολο με την στάθμη

$$\|u\|_K := \sup_{t \in [t_0-\tau, t_0+\tau]} e^{-K|t-t_0|} \cdot |u(t)| \, , \quad K > L$$

[$\|\cdot\|_K$ είναι όντως στάθμη (*)]

Η στάθμη $\|\cdot\|_K$ είναι ισοδύναμη με την sup-στάθμη στον χώρο X, διότι

$$e^{-2K\tau} \cdot |u(t)| \le e^{-K|t-t_0|} |u(t)| \le e^{0} \cdot |u(t)|$$

$$\Rightarrow \exists \ K_1 = e^{-2K\tau} \text{ και } K_2 = 1 \text{ τ.ω.}$$

$$K_1 \, |\cdot|_{\sup} \le \|\cdot\|_K \le K_2 \cdot |\cdot|_{\sup}.$$

Θεωρώ $\rho := \frac{L}{K} < 1$

Εφόσον X: κλειστό υποσύνολο $C([t_0-\tau, t_0+\tau], \mathbb{R}^n)$ (τιμές) ως προς την sup-στάθμη

$\Rightarrow X$: πλήρης ως προς την sup-στάθμη.

Άρα X: πλήρης και ως προς $\|\cdot\|_K$.

2ο βήμα: Θδο ο τελεστής T απεικονίζει το X στο X.

Έστω $u \in X$, τότε u: συνεχής στο $[t_0-\tau, t_0+\tau]$

και F: συνεχής τότε και $F(\cdot, u(\cdot))$ $(F \circ u)$ είναι συνεχής

$\Rightarrow x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))\,ds$: παρ/μη άρα και συνεχής.

και $|Tu(t) - x_0| = \left|x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,u(s))\,ds - x_0\right|$

$= \left|\int_{t_0}^{t} F(s,u(s))\,ds\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |F(s,u(s))|\,ds\right|$

$\leq \left|\int_{t_0}^{t} (Lb+M)\,ds\right| \leq \int_{t_0}^{t_0+\tau} (Lb+M)\,ds = \tau \cdot (Lb+M)$

$\overset{\text{υπθ.}}{\leq} \frac{b}{Lb+M}(Lb+M) = b$

οπότε $\|Tu(t) - x_0\|_K := \sup_{t \in [t_0-\tau, t_0+\tau]} e^{-K|t-t_0|} \cdot |Tu(t) - x_0| \leq e^{0} \cdot b = b$

Άρα εάν $u \in X$, τότε και $Tu \in X$.

...λύσεις
...άσκησης 1

27/03/18

3ο βήμα: Ν.δ.ο T: συστολή στον X.

Πράγματι εάν $u_1, u_2 \in X$ έχουμε τα εξής:

1η περίπτωση: $t \ge t_0$

Τότε $|Tu_1(t) - Tu_2(t)| = |x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,u_1(s))ds - x_0 -$

$- \int_{t_0}^{t} F(s,u_2(s))ds| = |\int_{t_0}^{t} F(s,u_1(s))ds - F(s,u_2(s))ds| \le$

$\le |\int_{t_0}^{t} |F(s,u_1(s)) - F(s,u_2(s))|ds| \le |\int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)} \cdot e^{-k(s-t_0)} \cdot L|u_1(s) -$

$- u_2(s)|ds| \le L\int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)} \cdot \|u_1 - u_2\|_k ds =$

$= L \cdot \|u_1 - u_2\|_k \cdot \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{k} e^{k(s-t_0)}\right)' ds =$

$= \frac{L}{k}\left(e^{k|t-t_0|} - 1\right)\|u_1 - u_2\|_k$

οπότε για $t \ge t_0$:

$e^{-k|t-t_0|} \cdot |Tu_1(t) - Tu_2(t)| \le \frac{L}{k}\left(\underbrace{1 - e^{-k|t-t_0|}}_{\le 1}\right)\|u_1 - u_2\|_k$

δηλαδή $\|Tu_1(t) - Tu_2(t)\|_k \le \underbrace{\frac{L}{k}}_{=\rho<1}\|u_1 - u_2\|_k$

Περίπτωση 2η:

Όμοια δουλεύουμε για $t \le t_0$:

$|Tu_1(t) - Tu_2(t)| = L|\int_{t_0}^{t} e^{k(t_0-s)} \cdot e^{-k(t_0-s)} \cdot |u_1(t) - u_2(t)|ds| \le$

$\le L\|u_1 - u_2\|_k \int_{t}^{t_0} e^{k(t_0-s)} ds = \dots$

Επομένως σε κάθε περίπτωση:

$\|Tu_1 - Tu_2\|_k \le \rho \|u_1 - u_2\|_k$

δηλαδή T συστολή στον X.

...μα 4ο:

...ουν $(X, \|\cdot\|)$ πλήρης χ.ν. X και $T: X \to X$, $u \to Tu$ και T συστολή έχουμε ότι η T έχει μοναδικό σταθερό σημείο $Tu = u$ το οποίο ισοδύναμα είναι λύση της ολοκληρωτικής, άρα και του Π.Α.Τ.

Παρατήρηση: $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ δεν είναι Lipschitz σε περιοχή του 0.

Λύση:

Έστω $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,a]$, $a>0$

Εάν υποθέσουμε ότι η f είναι Lipschitz στο $[0,a]$, τότε θα υπάρχει $L>0$ τέτοιο ώστε:

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall\, x,y\in[0,a]$$

Εάν $x = \frac{a}{n^2}$ και $y=0$, τότε έχουμε ότι:

$$\left|f\left(\frac{a}{n^2}\right) - f(0)\right| = \left|\frac{\sqrt{a}}{n} - 0\right| = \frac{\sqrt{a}}{n} = \frac{n}{\sqrt{a}}\cdot\frac{a}{n^2} =$$

$= \frac{n}{\sqrt{a}}\left|\frac{a}{n^2} - 0\right|$. Επομένως $\frac{n}{\sqrt{a}} < L$ άτοπο διότι το n είναι τυχαίος φυσικός αριθμός.

• Εάν $0 < c \leq x \leq d$, τότε η f είναι Lipschitz στο $[c,d]$, διότι η $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[c,d]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό. Οπότε εάν $x,y\in[c,d]$, $\exists\, \xi\in(x,y)$ τ.ω:

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}|x-y| \leq$$

$\leq \frac{1}{2\sqrt{c}}|x-y|$

Άσκηση:

Ν.δ.ο. η διαφορική εξίσωση: $u' = u + u^{1/2}$ (όπου $u = u(t)$) έχει μοναδική λύση που διέρχεται από το σημείο (t_0, x_0) όταν $x_0 > 0$ ($x_0 \neq 0$) και υπάρχουν περισσότερες από μία, όταν $x_0 = 0$.

Λύση:

Έστω $u'(t) = u(t) + u(t)^{1/2}$
$u(t_0) = x_0$

και $x_0 > 0$

Η $F(t,x) = x + x^{1/2}$, ορίζεται $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$. Εφόσον $x_0 \neq 0$ τότε υπάρχουν $a, b > 0$ ε.ω. $K_{a,b}(t_0,x_0) = \{(t,x)\in \mathbb{R}\times(0,+\infty) : |t-t_0|\leq a, |x-x_0|\leq b\} \subseteq \mathbb{R}\times(0,+\infty)$

Εάν $(t,x)\in K_{a,b}(t_0,x_0)$ τότε $t_0 - a \leq t \leq t_0 + a$ και $0 < x_0 - b \leq x \leq x_0 + b$. Η F είναι συνεχής στο $K_{a,b}(t_0,x_0)$. Επιπλέον είναι και Lipschitz στο $K_{a,b}(t_0,x_0)$ διότι εάν (t,x) και $(t,y)\in K_{a,b}(t_0,x_0)$ τότε:

$$|F(t,x) - F(t,y)| = |x + x^{1/2} - y - y^{1/2}| \leq$$

$$\leq |x-y| + |x^{1/2} - y^{1/2}| \overset{\text{Θ.Μ.Τ}}{\leq} |x-y| + \frac{1}{2\sqrt{x_0-b}}|x-y| =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x_0-b}}\right)|x-y|$$, άρα είναι Lipschitz

- $\sup_{t\in[t_0-a,t_0+a]} |F(t,x_0)| = |x_0 + \sqrt{x_0}| = x_0 + \sqrt{x_0}$ οπότε

αν επιλέξω $0 < c < \min\{a, \frac{b}{Lb+M}\}$ τότε υπάρχει μοναδική λύση u ορισμένη στο $[t_0-\tau, t_0+\tau]$ του Π.Α.Τ σύμφωνα με το θεώρημα Picard.

Εάν $x_0=0$: η $u=0$ είναι λύση της Δ.Ε και πληρεί και την αρχική συνθήκη $u(t_0)=0=x_0$. Αλλά εάν $u(t)=\left(e^{-(1/2)(t_0-t)}-1\right)^2$ τότε:
(→ αυτή τη βρήκαμε αν θέσω αρχική και λύσω με μέθοδο Bernoulli.)

$$u'(t)=e^{-(t_0-t)}-e^{-\frac{1}{2}(t_0-t)}$$

και η u ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση. Επιπλέον $u(t_0)=0$.
Άρα εάν $x_0=0$ το Π.Α.Τ έχει παραπάνω από μία λύση.

Σημείωση: Το θεώρημα τοπικής ύπαρξης και μοναδικότητας αποδεικνύεται ότι εξακολουθεί να ισχύει ακόμη και αν στο $K_{a,b}(t_0,x_0)$ παίρνω το t_0 να είναι αριστερό ή δεξί άκρο του διαστήματος, δηλαδή $[t_0,t_0+a]$ ή $[t_0-a,t_0]$. Εξασφαλίζοντας αντίστοιχα λύση σε διαστήματα της μορφής $[t_0,t_0+\tau]$ ή $[t_0-\tau,t_0]$.

Θεώρημα ύπαρξης τοπικής λύσης Peano:
Το θεώρημα αυτό εξασφαλίζει ύπαρξη τοπικής λύσης χωρίς τη συνθήκη Lipschitz για τη συνάρτηση F.

Ορισμός:
Έστω S μια οικογένεια συναρτήσεων ορισμένων σε ένα διάστημα $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$. Η S λέγεται ισοσυνεχής εάν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τ.ω αν $t,s\in[a,b]$ με $|t-s|<\delta$ τότε $|f(t)-f(s)|<\varepsilon$ $\forall f\in S$.

Θεώρημα: (Arzela-Ascoli)
Υποθέτουμε ότι (u^n) είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, ορισμένων σε ένα διάστημα $[a,b]$. Αν η

ακολουθία αυτή είναι φραγμένη κατά σημείο και ισοσυνεχής, τότε υπάρχει υπακολουθία της που συγκλίνει ομοιόμορφα επί του διαστήματος $[a,b]$.

Θεώρημα: (Peano):
Υποθέτουμε ότι $F(t,x)$ συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο της μορφής:

$$K_{a,b}(t_0,x_0)=\{(t,x): |t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\},$$ τότε

το Π.Α.Τ:

$$u'(t)=F(t,x)$$
$$u(t_0)=x_0$$

έχει μία τουλάχιστον λύση, ορισμένη για t με $|t-t_0|\le \tau$ όπου $\tau:=\min\{a,\frac{b}{M}\}$, όπου

$$M=\sup_{(t,x)\in K_{a,b}(t_0,x_0)}|F(t,x)|$$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης:

• Ασχολούμαστε πρώτα με το διάστημα $[t_0,t_0+\tau]$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $u_1(t)=x_0,\ t\in[t_0,t_0+\tau]$ και για $n>1$:

$$u_n(t)=\begin{cases} x_0, & t_0\le t\le t_0+\frac{\tau}{n} \\ x_0+\int_{t_0}^{t-\frac{\tau}{n}}F(s,u_n(s))ds, & t_0+\frac{k\tau}{n}\le t\le t_0+\frac{(k+1)\tau}{n}\end{cases}$$

$\to k\in\{1,2,\dots,n-1\}$

Θα δείξουμε ότι: (u_n) είναι καλά ορισμένη και $|u_n(t)-x_0|\le b$.

• Η $u_1(t)=x_0\ \forall t\in[t_0,t_0+\tau]$ οπότε:
$|u_1(t)-x_0|=|x_0-x_0|=0\le b$ και

$(t, u^1(t)) \in K_{a,b}(t_0, x_0)$

Για $n=2$, τότε: αν $t \in [t_0, t_0 + \frac{\tau}{2}]$, τότε:

$u_2(t) = x_0$ και $|u_2(t) - x_0| = 0 \leq b$ άρα

$(t, u_2(t)) \in K_{a,b}(t_0, x_0)$

Αν $t \in [t_0 + \frac{\tau}{2}, t_0 + \tau]$, τότε (επειδή το άνω άκρο του ολοκληρώματος είναι $t - \frac{\tau}{2}$) έχουμε ότι:

$$t_0 + \frac{\tau}{2} \leq t \leq t_0 + \tau \quad \text{οπότε:}$$

$$t_0 + \frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2} \leq t - \frac{\tau}{2} \leq t_0 + \tau - \frac{\tau}{2} \quad (**)$$

δηλαδή $t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\tau}{2}$

Άρα έχει νόημα ο τύπος: $u^2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{\tau}{2}} f(s, u_2(s))\,ds$ αφού για $s \in [t_0, t_0 + \frac{\tau}{2}]$ η u_2 έχει ορισθεί στο προηγούμενο κλάδο.

Επιπλέον: $|u^2(t) - x_0| = |x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{\tau}{2}} f(s, u^2(s))\,ds - x_0| =$

$$= \left| \int_{t_0}^{t-\frac{\tau}{2}} f(s, u^2(s))\,ds \right| \leq M \left| t - \frac{\tau}{2} - t_0 \right| \leq M \cdot \frac{\tau}{2} <$$

$$\underset{\tau \leq \frac{b}{M}}{<} \frac{b}{M} \cdot M = b.$$

(Η συνέχεια της απόδειξης την άλλη φορά...)